

Analyse

Analyse	1
1. Limites de fonctions continues	2
2. Limite d'une opération	3
3. Un réel différent de 0 divisé par 0	5
4. Indétermination 0 sur 0.....	7
5. Dérivabilité en un point	8
6. Dérivée d'une fonction composée	8
7. Opérations sur les fonctions dérivées	8
8. Dérivées de quelques fonctions	9
9. Déterminer une dérivée	10
10. Interprétation graphique du nombre dérivé.....	13
11. Signe de la dérivée et sens de variation	17
12. Exemple : paraboles.....	18
13. Intersection avec les axes.....	19
14. Position relative de 2 courbes	20
15. Analyse de fonctions au Test Commun 1	21
16. Exercice d'application au Test Commun 1	23
17. Solution détaillées.....	25

1. Limites de fonctions continues

Propriété

Soit $f: \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathcal{D}_f$ alors :

$$\begin{array}{ll} f \text{ est continue en } a & \text{ssi} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) ; \\ f \text{ est continue} & \text{ssi} \quad \text{elle est continue pour tout } a \in \mathcal{D}_f. \end{array}$$

Propriété

Les fonctions polynômes, les fonctions rationnelles, la fonction sinus, la fonction cosinus, la fonction tangente, les fonctions exponentielles, les fonctions puissances, les fonctions sont des fonctions continues.

La composée de deux fonctions continues est continue.

La somme, la différence, le produit, le quotient de deux fonctions continues sont des fonctions continues.

Exercice 1 : Limite en un point du domaine de définition

Calculer les limites.

- a) $\lim_{x \rightarrow -3} 2x^2 - 5x + 4$
- b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 + 3x + 4}{x - 4}$
- c) $\lim_{x \rightarrow 16} \sqrt{x}$
- d) $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{x^2 + 4}$

Solution de l'exercice 1

- a) 37
- b) -3
- c) 4
- d) $2\sqrt{2}$

Exercice 2 : Limite en un point du domaine de définition (facultatif)

- a) $\lim_{x \rightarrow 1} 4x^3 - 3x^2 + 5x - 2$
- b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4 + 3x}{x^2 - x + 3}$
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x}$
- d) $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{x^2 - 5}{x + 6}}$

Solution de l'exercice 2

- a) 4
- b) $\frac{-2}{9}$
- c) 0
- d) $\frac{2}{3}$

2. Limite d'une opération

Exercice 3

Compléter les tableaux suivants.

Ecrire *FI* quand il y a une forme indéterminée ($\infty - \infty$; $0 \times \infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$).

		lim_B				
	lim_A + lim_B	$-\infty$	-4	0	7	$+\infty$
lim_A	$-\infty$					
	-4					
	0					
	7					
	$+\infty$					

		lim_B				
	lim_A - lim_B	$-\infty$	-4	0	7	$+\infty$
lim_A	$-\infty$					
	-4					
	0					
	7					
	$+\infty$					

		lim_B				
	lim_A $\times$ lim_B	$-\infty$	-4	0	7	$+\infty$
lim_A	$-\infty$					
	-4					
	0					
	7					
	$+\infty$					

		lim_B						
	$\frac{\lim_A}{\lim_B}$	$-\infty$	-4	0^-	0	0^+	7	$+\infty$
lim_A	$-\infty$							
	-4							
	0							
	7							
	$+\infty$							

Solution de l'exercice 3

		lim_B				
lim_A + lim_B		−∞	−4	0	7	+∞
lim_A	−∞	−∞	−∞	−∞	−∞	FI
	−4	−∞	−8	−4	3	+∞
	0	−∞	−4	0	7	+∞
	7	−∞	3	7	14	+∞
	+∞	FI	+∞	+∞	+∞	+∞

		lim_B				
lim_A - lim_B		−∞	−4	0	7	+∞
lim_A	−∞	FI	−∞	−∞	−∞	−∞
	−4	+∞	0	−4	−11	−∞
	0	+∞	4	0	−7	−∞
	7	+∞	11	7	0	−∞
	+∞	+∞	+∞	+∞	+∞	FI

		lim_B				
lim_A × lim_B		−∞	−4	0	7	+∞
lim_A	−∞	+∞	+∞	FI	−∞	−∞
	−4	+∞	16	0	−28	−∞
	0	FI	0	0	0	FI
	7	−∞	−28	0	49	+∞
	+∞	−∞	−∞	FI	+∞	+∞

		lim_B						
$\frac{\lim_A}{\lim_B}$		$-\infty$	-4	0^-	0	0^+	7	$+\infty$
lim_A	$-\infty$	FI	$+\infty$	$+\infty$		$-\infty$	$-\infty$	FI
	-4	0	1	$+\infty$		$-\infty$	$\frac{-4}{7}$	0
	0	0	0		FI		0	0
	7	0	$\frac{-7}{4}$	$-\infty$		$+\infty$	1	0
	$+\infty$	FI	$-\infty$	$-\infty$		$+\infty$	$+\infty$	FI

3. Un réel différent de 0 divisé par 0

Exercice 4 : $\frac{\text{un réel différent de 0}}{0}$

Étudiez la limite de la fonction f au point a indiqué. Il peut être nécessaire d'étudier la limite à droite et la limite à gauche en a .

Donner une interprétation graphique de cette étude.

a) $f(x) = \frac{4x-1}{x-2}$; $a = 2$.

b) $f(x) = \frac{3x}{2-4x}$; $a = \frac{1}{2}$.

Solution de l'exercice 4

a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$

La droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

b) $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^+} f(x) = -\infty$

La droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est asymptote verticale à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

Exercice 5 : $\frac{\text{un réel différent de } 0}{0}$ (facultatif)

Étudiez la limite de la fonction f au point a indiqué. Il peut être nécessaire d'étudier la limite à droite et la limite à gauche en a .

Donner une interprétation graphique de cette étude.

- a) $f(x) = \frac{x^2+6}{x}$; $a = 0$.
- b) $f(x) = \frac{7-3x}{(2x-1)^2}$; $a = \frac{1}{2}$.
- c) $f(x) = \frac{x}{x^2+5x+6}$; $a = -3$.
- d) $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}-1}$; $a = 1$.
- e) $f(x) = \frac{-x^3+2}{(3-x)^4}$; $a = 3$.
- f) $f(x) = \frac{3x-1}{-2x^2+x+10}$; $a = -2$; $a = \frac{5}{2}$.
- g) $f(x) = \frac{2}{x^2-1}$; $a = 1$; $a = -1$.

Solution de l'exercice 5

a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

La droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

b) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = +\infty$

La droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est asymptote verticale à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

c) $\lim_{x \rightarrow (-3)^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow (-3)^+} f(x) = +\infty$

La droite d'équation $x = -3$ est asymptote verticale à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

d) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$

La droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

e) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\infty$

La droite d'équation $x = 3$ est asymptote verticale à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

f) $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow (\frac{5}{2})^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow (\frac{5}{2})^+} f(x) = -\infty$

La droite d'équation $x = -2$ est asymptote verticale à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

La droite d'équation $x = \frac{5}{2}$ est asymptote verticale à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

g) $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$

La droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

La droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

4. Indétermination 0 sur 0

Exercice 6 : $\frac{0}{0}$ et il faut factoriser

Étudiez la limite de la fonction f au point a indiqué.

$$f(x) = \frac{5x^2 - 3x - 14}{x - 2} ; \quad a = 2.$$

Solution de l'exercice 6

17

Exercice 7 : $\frac{0}{0}$ et il faut factoriser (facultatif)

Étudiez la limite de la fonction f au point a indiqué.

a) $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4} ; \quad a = 4.$

b) $f(x) = \frac{3x - 6}{x^2 - 4} ; \quad a = 2.$

c) $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x + 1} ; \quad a = -1.$

d) $f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 3x + 2} ; \quad a = 1.$

e) $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} ; \quad a = 9.$

Solution de l'exercice 7

a) 8 b) $\frac{3}{4}$ c) 3 d) -1 e) $\frac{1}{6}$

Exercice 8 : $\frac{0}{0}$ et il faut multiplier par le binôme conjugué

Étudiez la limite de la fonction f au point a indiqué.

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{4+x} - 2} ; \quad a = 0.$$

Solution de l'exercice 8

4

Exercice 9 : $\frac{0}{0}$ et il faut multiplier par le binôme conjugué (facultatif)

Étudiez la limite de la fonction f au point a indiqué.

a) $f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} ; \quad a = 0.$

b) $f(x) = \frac{x - 1}{2 - \sqrt{x + 3}} ; \quad a = 1.$

Solution de l'exercice 9

a) $\frac{1}{2}$ b) -4

5. Dérivabilité en un point

Définition

Soit $a \in \mathbb{R}$.

Soit une fonction $f: \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Alors :

f est dérivable en a ssi $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est un réel.

Cette limite est appelée nombre dérivé de f en a et est notée $f'(a)$.

6. Dérivée d'une fonction composée

Propriété

Soit $a \in \mathbb{R}$.

Soit la fonction $f: \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Soit la fonction $g: \mathcal{D}_g \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Soit $\begin{cases} f \text{ une fonction dérivable en } a \\ g \text{ une fonction dérivable en } f(a). \\ a \text{ est adhérent à } \mathcal{D}_{g \circ f} \setminus \{a\} \end{cases}$

Alors, $\begin{cases} g \circ f \text{ est dérivable en } a \\ (g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a) \end{cases}$.

7. Opérations sur les fonctions dérivées

Propriété

Soient u et v deux fonctions dérivables en a .

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors :

- La fonction λu est dérivable en a et $(\lambda u)'(a) = \lambda u'(a)$
- $u + v$ est dérivable en a et $(u + v)'(a) = u'(a) + v'(a)$
- $u v$ est dérivable en a et $(u v)'(a) = u'(a)v(a) + u(a) v'(a)$
- si $v(a) \neq 0$ alors $\frac{1}{v}$ est dérivable en a et $\left(\frac{1}{v}\right)'(a) = \frac{-v'(a)}{v^2(a)}$.
- si $v(a) \neq 0$ alors $\frac{u}{v}$ est dérivable en a et $\left(\frac{u}{v}\right)'(a) = \frac{u'(a)v(a) - u(a) v'(a)}{v^2(a)}$

8. Dérivées de quelques fonctions

Propriété : Dérivée d'une fonction constante

Soit f une fonction constante.

Alors pour tout $a \in \mathbb{R} : f'(a) = 0$.

Démonstration

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$(x \mapsto \lambda)'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lambda(a+h) - \lambda(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lambda - \lambda}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

c.q.f.d.

Propriété : Dérivée de la fonction identité

Soit f la fonction identité.

Alors pour tout $a \in \mathbb{R} : f'(a) = 1$.

Démonstration

Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} 1 = 1$$

c.q.f.d.

Propriété : Dérivée de la fonction inverse

Soit f la fonction inverse.

Alors pour tout $a \in \mathbb{R}^* : f'(a) = \frac{-1}{a^2}$.

Démonstration

Soit $a \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x(x-a)} - \frac{1}{a(x-a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{a}{x(x-a)a} - \frac{x}{a(x-a)x} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(a-x)}{x(x-a)a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{-(x-a)}{x(x-a)a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-1}{xa} = \frac{-1}{a} \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x} = \frac{-1}{a} \frac{1}{a} = \frac{-1}{a^2} \end{aligned}$$

c.q.f.d.

9. Déterminer une dérivée

Propriété

$$(ku)' = k u' \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$(k)' = 0 \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$(x)' = 1$$

$$(x^a)' = ax^{a-1}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Rem : $x \mapsto k$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

Rem : $x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

Rem : $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $] -\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

Rem : $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$

Exercice 10

Calculer $f'(x)$ en précisant pour quels nombres x votre calcul est valable.

a) $f(x) = 5x^3 - 3x^2 - \frac{1}{4}x + 1$

b) $f(x) = \frac{-2x^4 + x^2 + \sqrt{3}x - \sqrt{7}}{5}$

c) $f(x) = (4x^2 - x + 1)(2x - 3)$

d) $f(x) = \frac{2x-3}{5x+2}$

e) $f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2}$

f) $f(x) = \sqrt{x} + 4x^3$

g) $f(x) = \sqrt{x}(3x + 4)$

h) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

i) $f(x) = \sqrt{-3x+1}$

Solution de l'exercice 10

a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 15x^2 - 6x - \frac{1}{4}$$

b) f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{-8}{5}x^3 + \frac{2}{5}x + \frac{\sqrt{3}}{5}$$

c) f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 24x^2 - 28x + 5$$

d) f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-2}{5} \right\}$.

$$f'(x) = \frac{19}{(5x+2)^2}$$

e) f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$.

$$f'(x) = \frac{-2x+3}{(x^2-3x+2)^2}$$

f) f est dérivable sur $]0; +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 12x^2$$

g) f est dérivable sur $]0; +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{3x+4}{2\sqrt{x}} + 3\sqrt{x}$$

h) f est dérivable sur $]0; +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{-1}{2x\sqrt{x}}$$

i) f est dérivable sur $] -\infty; \frac{1}{3}[$.

$$f'(x) = \frac{-3}{2\sqrt{-3x+1}}$$

Exercice 11 (facultatif)

Calculer $f'(x)$ en précisant pour quels nombres x votre calcul est valable.

a) $f(x) = -2x^5 + \frac{1}{2}x^3 - 3x + 10$

b) $f(x) = \frac{4x^3 - x^2 - \sqrt{5}x + \sqrt{3}}{2}$

c) $f(x) = (-5x^2 + 2x - 1)(-3x + 7)$

d) $f(x) = \frac{-3x+1}{2x-3}$

e) $f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 6}$

f) $f(x) = 4\sqrt{x} - x^3$

g) $f(x) = \sqrt{x}(2x + 7)$

h) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} + 1000$

i) $f(x) = \sqrt{7x + 3}$

Solution de l'exercice 11

a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = -10x^4 + \frac{3}{2}x^2 - 3$$

b) f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 6x^2 - x - \frac{\sqrt{5}}{2}$$

c) f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 45x^2 - 82x + 17$$

d) f est dérivable sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$

$$f'(x) = \frac{7}{(2x-3)^2}$$

e) f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{-2; 3\}$

$$f'(x) = \frac{-2x+1}{(x^2-x-6)^2}$$

f) f est dérivable sur $]0; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - 3x^2$$

g) f est dérivable sur $]0; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{2x+7}{2\sqrt{x}} + 2\sqrt{x}$$

h) f est dérivable sur $]0; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{-3}{2x\sqrt{x}}$$

i) f est dérivable sur $\left] \frac{-3}{7}; +\infty \right[$

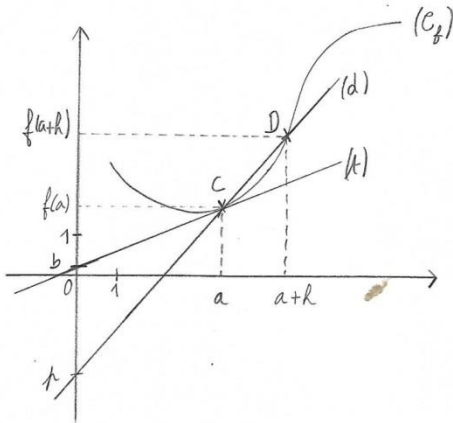
$$f'(x) = \frac{7}{2\sqrt{7x+3}}$$

10. Interprétation graphique du nombre dérivé

Définition

Soit a un réel et $f: \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en a et $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f .
Alors, (t) est la tangente de $\mathcal{C}_f$ en a ssi
 (t) est la droite passant par le point de coordonnées $(a; f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$.

Remarque



$$C \begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix} \quad D \begin{pmatrix} a+h \\ f(a+h) \end{pmatrix}$$

$$\vec{CD} = \begin{pmatrix} a+h-a \\ f(a+h)-f(a) \end{pmatrix} = (a+h-a) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} \end{pmatrix}$$

$= m = \text{coefficient directeur de la droite } (d)$

$$(d): y = mx + p \quad \text{avec } m = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$(t): y = f'(a)x + b$$

Propriété

Soit a un réel et $f: \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en a et $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f .

Soit (t) la tangente de $\mathcal{C}_f$ en a .

Alors, $(t): y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Démonstration

La tangente en a a pour coefficient directeur $f'(a)$.

Son équation réduite est donc de la forme $(t): y = f'(a)x + b$ où b est un réel.

Les coordonnées $(a; f(a))$ vérifient cette équation.

$$\text{Donc, } f(a) = f'(a)a + b$$

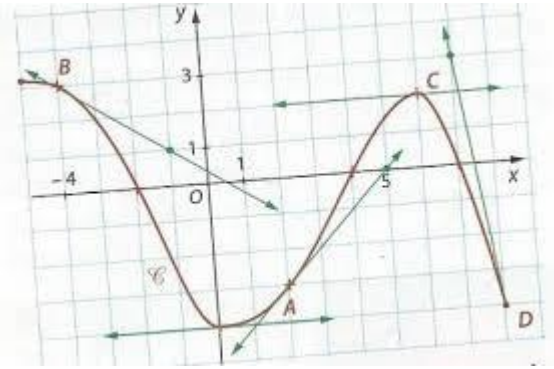
$$b = f(a) - f'(a)a$$

$$(t): y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a$$

$$(t): y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

c.q.f.d.

Exercice 12 (facultatif)



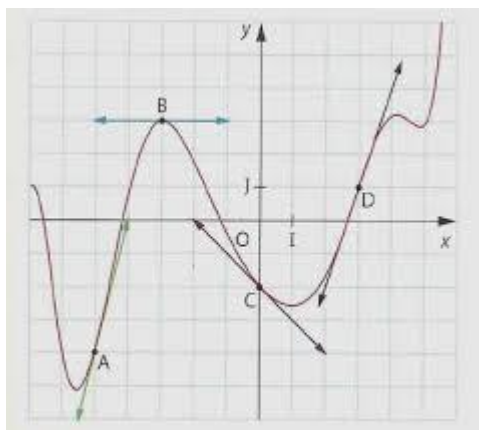
- Lire graphiquement le nombre dérivé $f'(-4)$.
- En déduire l'équation réduite de la tangente (d) en -4 .
- Lire graphiquement le nombre dérivé $f'(2)$.
- En déduire l'équation réduite de la tangente (r) au point A .
- Lire graphiquement le nombre dérivé $f'(6)$.
- En déduire l'équation réduite de la tangente (t) au point C .
- Déterminer le tableau de signe de f' et le tableau de variation de f sur $[-4; 8]$.

Solution de l'exercice 12

- $f'(-4) = \frac{-2}{3}$
- $(d): y = \frac{-2}{3}x + \frac{1}{3}$
- $f'(2) = 1$
- $(r): y = x - 5$
- $f'(6) = 0$
- $(d): y = 2$
- g)

x	-4	0	6	8
Signe de $f'(x)$	-	-	+	-
$f(x)$	3	-4	2	-4

Exercice 13 (facultatif)



- Lire graphiquement le nombre dérivé $f'(-3)$.
- En déduire l'équation réduite de la tangente (d) au point B .
- Lire graphiquement le nombre dérivé $f'(0)$.
- En déduire l'équation réduite de la tangente (r) au point C .
- Lire graphiquement le nombre dérivé $f'(3)$.
- En déduire l'équation réduite de la tangente (t) en 3.
- Déterminer le tableau de signe de f' et le tableau de variation de f sur $[-5; 3]$.

Solution de l'exercice 13

- $f'(-3) = 0$
- $(d): y = 3$
- $f'(0) = -1$
- $(r): y = -x - 2$
- $f'(3) = 3$
- $(t): y = 3x - 8$
-

x	-5	-3	1	3
signe de $f'(x)$	+	+	-	+
$f(x)$	-4	3	-2,5	1

Exercice 14

Déterminer l'équation réduite de la tangente (t) à la courbe $(\mathcal{C})$ représentant la fonction f au point d'abscisse -2 . La fonction est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$.

Solution de l'exercice 14

$$(t): y = -17x - 8$$

Exercice 15 (facultatif)

Déterminer l'équation réduite de la tangente (t) à la courbe $(\mathcal{C})$ représentant la fonction f au point d'abscisse 3. La fonction est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{2}\right\}$ par $f(x) = \frac{-x^2+2x-3}{2x-5}$.

Solution de l'exercice 15

$$(t): y = 8x - 30$$

11. Signe de la dérivée et sens de variation

Propriété : Signe de la dérivée et sens de variation

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle réel I .

Alors :

- Si la dérivée f' est **strictement positive** sur I , sauf peut-être en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est **strictement croissante** sur I .
- Si la dérivée f' est **strictement négative** sur I , sauf peut-être en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est **strictement décroissante** sur I .
- Si la dérivée f' est **nulle** sur I , alors f est **constante** sur I .

Définition : Extremum local

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle réel I .

Soit $a \in I$.

Alors :

f a un maximum local (respectivement minimum local) en a
ssi

il existe un intervalle ouvert J tel que

$a \in J$ et $f(a)$ est le maximum (respectivement minimum) de f restreinte à J .

Propriété

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle réel ouvert I et $a \in I$.

Alors,

si $f(a)$ est un extremum local de f , alors $f'(a) = 0$;

si f' s'annule en a en changeant de signe, alors $f(a)$ est un extremum local de f .

12.Exemple : paraboles

Exercice 16

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + 12x - 8$. On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(0; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

- 1) Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x .
- 2) Étudier le signe de f' .
Dresser le tableau de variation de f .
- 3) Est-ce que la fonction f admet un maximum ? Si oui, quel est ce maximum et pour quelle valeur de x est-il atteint ?
- 4) Est-ce que la fonction f admet un minimum ? Si oui, quel est ce minimum et pour quelle valeur de x est-il atteint ?
- 5) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère donné.

Exercice 17 (facultatif)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 4x - 4$. On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(0; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

- 1) Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x .
- 2) Étudier le signe de f' .
Dresser le tableau de variation de f .
- 3) Est-ce que la fonction f admet un maximum ? Si oui, quel est ce maximum et pour quelle valeur de x est-il atteint ?
- 4) Est-ce que la fonction f admet un minimum ? Si oui, quel est ce minimum et pour quelle valeur de x est-il atteint ?
- 5) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère donné.

13. Intersection avec les axes

Exercice 18

Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ avec les axes des coordonnées.

1) $f(x) = \frac{2x^2 - x - 2}{x + 1}$

2) $f(x) = x^2 + x + 1$

3) $f(x) = \frac{2x^2 - x}{2x + 3}$

4) $f(x) = x^2 + x - 20$

5) $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 2}{3x + 4}$

6) $f(x) = -\frac{-2x + 3}{2x + 1}$

7) $f(x) = x(-x^2 + 16)(x + 2)$

Solutions de l'exercice 18

1) Avec l'axe des ordonnées : $(0; -2)$; avec l'axe des abscisses : $\left(\frac{1-\sqrt{17}}{4}; 0\right)$ et $\left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}; 0\right)$.

2) Avec l'axe des ordonnées : $(0; 1)$; avec l'axe des abscisses : pas de point d'intersection.

3) Avec l'axe des ordonnées : $(0; 0)$; avec l'axe des abscisses : $(0; 0)$ et $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$.

4) Avec l'axe des ordonnées : $(0; -20)$; avec l'axe des abscisses : $(4; 0)$ et $(-5; 0)$.

5) Avec l'axe des ordonnées : $(0; \frac{1}{2})$; avec l'axe des abscisses : $(-2 - \sqrt{2}; 0)$ et $(-2 + \sqrt{2}; 0)$.

6) Avec l'axe des ordonnées : $(0; -3)$; avec l'axe des abscisses : $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$.

7) Avec l'axe des ordonnées : $(0; 0)$; avec l'axe des abscisses : $(0; 0)$, $(4; 0)$, $(-4; 0)$, $(-2; 0)$.

14.Position relative de 2 courbes

Exercice 19

Étudier la position relative de la courbe (C_f) par rapport à la courbe (C_g) .

- 1) $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{2x+3}{x-1}$
 $g: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x+3}{x-1}$
- 2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x+2$
 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto -3x+5$
- 3) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto -2x+3$
 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto -2x+2$
- 4) $f: \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{-1}{2}\right\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto -\frac{5x+3}{2x+1}$
 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2$
- 5) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2-4$
 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (4-2x)(x+3)$
- 6) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto -2x+3$
 $g: [-3; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x^2+6x-21$

Solutions de l'exercice 19

- 1) Soit $d(x) = f(x) - g(x) = \frac{2x+3}{x-1} - \frac{x+3}{x-1} = \frac{x}{x-1}$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
Signe de x	-	0	+	+
Signe de $x-1$	-	-	0	+
Signe de $d(x)$	+	0	-	+

Donc,

(C_f) est strictement au-dessus de (C_g) sur $] -\infty; 0[\cup] 1; +\infty[$;

(C_f) est strictement en dessous de (C_g) sur $] 0; 1[$;

(C_f) et (C_g) admettent un point d'intersection en 0.

- 2) (C_f) est strictement au-dessus de (C_g) sur $\left] \frac{3}{4}; +\infty[\right]$;
 (C_f) est strictement en dessous de (C_g) sur $\left] -\infty; \frac{3}{4} \right]$;
 (C_f) et (C_g) admettent un point d'intersection en $\frac{3}{4}$.
- 3) (C_f) est strictement au-dessus de (C_g) sur $\mathbb{R}$;
- 4) (C_f) est strictement au-dessus de (C_g) sur $\left] -\frac{5}{9}; \frac{-1}{2} \right]$;
 (C_f) est strictement en dessous de (C_g) sur $\left] -\infty; -\frac{5}{9} \right] \cup \left] \frac{-1}{2}; +\infty \right]$;
 (C_f) et (C_g) admettent un point d'intersection en $-\frac{5}{9}$.
- 5) (C_f) est strictement au-dessus de (C_g) sur $\left] -\infty; -\frac{8}{3} \right] \cup \left] 2; +\infty \right]$;
 (C_f) est strictement en dessous de (C_g) sur $\left] -\frac{8}{3}; 2 \right]$;
 (C_f) et (C_g) admettent un point d'intersection en $-\frac{8}{3}$ et en 2.
- 6) (C_f) est strictement au-dessus de (C_g) sur $[-3; 2[$;
 (C_f) est strictement en dessous de (C_g) sur $] 2; +\infty[$;
 (C_f) et (C_g) admettent un point d'intersection en 2.

15. Analyse de fonctions au Test Commun 1

Exercice 20 : 2017 – Test Commun 1 – 4/5

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2+4x+4}{x^2+2x+1}$ sur l'intervalle $I = [-5; -1[\cup]-1; 5]$.

On note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

1. Calculer les valeurs $f(-5)$ et $f(5)$.
2. Déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x).$$

Interpréter graphiquement ces résultats.

3. Montrer que $f'(x) = \frac{-2(x+2)(x+1)}{(x^2+2x+1)^2}$ sur I .
4. Étudier le signe de f' .
Dresser le tableau de variations de f .
5. Calculer les coordonnées du point d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec l'axe des ordonnées.
6. Calculer les coordonnées des points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec l'axe des abscisses.
7. Donner l'équation de la tangente horizontale à $(\mathcal{C}_f)$.
8. Déterminer l'équation de la tangente $(\mathcal{T})$ à la courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0.
9. Étudier la position relative de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et de la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = -4x + 4$ sur I .
10. Recopier et remplir le tableau de valeurs de f (arrondies au dixième) ci-dessous.

x	-5	-4	-3	-2	-1,5	-1,3	-1	-0,3	0	1	2	3	4	5
$f(x)$														

1. Tracer $(\mathcal{T})$, $(\mathcal{C}_f)$, $(\mathcal{D})$ ainsi que son asymptote verticale sur l'intervalle I avec soin et précision.

Exercice 21 : 2016 – Test Commun 1 – 4/5

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2+6x-7}{x-2}$ sur l'intervalle $I = [-8; 2[\cup]2; 8]$.

On note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

1. Calculer les valeurs $f(-8)$ et $f(8)$.
2. Déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x).$$

Interpréter graphiquement ces résultats.

3. Montrer que $f'(x) = \frac{x^2-4x-5}{(x-2)^2}$ sur I .
4. Étudier le signe de f' .
Dresser le tableau de variations de f .
5. Calculer les coordonnées du point d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec l'axe des ordonnées.
6. Calculer les coordonnées des points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec l'axe des abscisses.
7. Donner les équations des tangentes horizontales à $(\mathcal{C}_f)$.
8. Déterminer l'équation de la tangente $(\mathcal{T})$ à la courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 3.
9. Étudier la position relative de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et de la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x + 17$.
10. Recopier et remplir le tableau de valeurs de f (arrondies au dixième) ci-dessous.

x	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$																	

11. Tracer $(\mathcal{T})$, $(\mathcal{C}_f)$, $(\mathcal{D})$ ainsi que son asymptote verticale et ses tangentes horizontales sur l'intervalle I avec soin et précision.

16.Exercice d'application au Test Commun 1

Exercice 22 : TC 1 – 2018 – 4/5

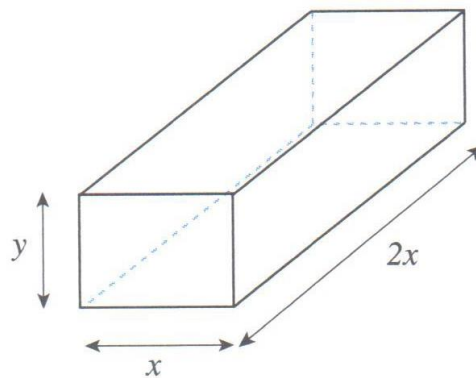
Partie A

- 1) Trouver les valeurs a , b , et c tel que : $x^3 - 216 = (x - 6)(ax^2 + bx + c)$.
- 2) En déduire le signe de $x^3 - 216$.

Partie B

Un laboratoire pharmaceutique fabrique un produit solide conditionné sous la forme d'un petit parallélépipède rectangle dont le volume est égal à 576 mm^3 .

On note y la hauteur, ses autres dimensions sont x et $2x$ (x et y sont en mm).



- 1) Montrer que $y = \frac{288}{x^2}$.
- 2) Démontrer que la surface totale, en mm^2 , de ce solide est donnée par la fonction S définie pour $x \neq 0$ par : $S(x) = 4\left(x^2 + \frac{432}{x}\right)$.
- 3) Étudier le sens de variation de la fonction S sur l'intervalle $[3, 12]$ (utiliser les résultats de la *Partie A*).
- 4) Les conditions d'emballage imposent que x soit compris entre 3 et 12 mm .
Donner les dimensions du parallélépipède rectangle pour que la surface totale soit minimale.
- 5) Calculer cette surface minimale.

Exercice 23 : TC 1 – 2016 – 4/5

La figure 1 ci-dessous représente un patron du parallélépipède de la figure 2. Ce patron est fabriqué à partir d'une feuille cartonnée de 30 cm de côté.

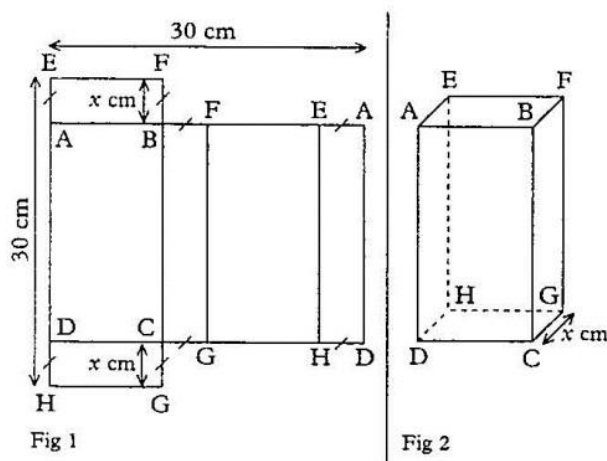
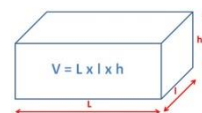


Fig 2

1. Démontrer que le volume $V(x)$ du parallélépipède ABCDEFGH s'exprime en cm^3 par $V(x) = 2x(15 - x)^2$, avec $x \in]0; 15[$.

Rappel du calcul du volume d'un parallélépipède rectangle :



2. Montrer que $V'(x) = 6x^2 - 120x + 450$ sur l'intervalle $]0; 15[$.
3. Dresser le tableau de signes de V' sur l'intervalle $]0; 15[$ et le tableau de variations de V sur ce même intervalle (indiquer les valeurs des limites de V aux bornes de l'intervalle).
4. Tracer la courbe représentative de V dans le plan muni d'un repère orthogonal, 1 cm représentant en abscisses 1 cm, et en ordonnée 100 cm^3 .
5. Comment faut-il choisir x pour que le volume $V(x)$ du parallélépipède soit le plus grand possible ? Quel est ce volume maximal ?
6. Le parallélépipède ainsi obtenu est une boîte de lait. Le fabricant voudrait que le volume de cette boîte soit 0,5 litre, c'est-à-dire 500 cm^3 .

Combien de valeurs de x permettent de fabriquer des boîtes de 0,5 litre ? Les faire figurer sur le graphique et en donner une valeur arrondie à l'unité près pour chacune d'elles.

7. Parmi ces valeurs, laquelle choisira le fabricant ?
8. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Déterminer les valeurs exactes de x permettant de fabriquer des boîtes de lait de 0,5 litre.

17.Solution détaillées

Solutions détaillée de l'exercice 1

a)

$$\lim_{x \rightarrow -3} 2x^2 - 5x + 4 = 2(-3)^2 - 5(-3) + 4 = 18 + 15 + 4 = 37$$

Remarque :

x	-6	-3,5	-3,1	-3,01	-3,001	-3	-2,999	-2,99	-2,9	-2,5	0
$2x^2 - 5x + 4$	106	46	38,72	37,1702	37,017002	37	36,983002	36,8302	35,32	29	4

b)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 + 3x + 4}{x - 4} = \frac{-(2)^2 + 3(2) + 4}{(2) - 4} = \frac{-4 + 6 + 4}{-2} = \frac{6}{-2} = -3$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow 16} \sqrt{x} = \sqrt{16} = 4$$

d)

$$\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{(-2)^2 + 4} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = \sqrt{2 \times 4} = 2\sqrt{2}$$

Solution détaillée de l'exercice 5

a)

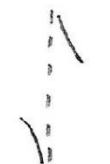
$$\cancel{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 6}{x} = \frac{0^2 + 6}{0} = \frac{6}{0}}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de x		$- \quad 0 \quad +$	

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} x^2 + 6 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 6 = 6 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} x = 0^- \end{array} \right\} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{x^2 + 6}{x} = -\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^2 + 6 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 6 = 6 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x = 0^+ \end{array} \right\} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x^2 + 6}{x} = +\infty$$

Interprétation graphique : La droite d'équation $x=0$ est asymptote verticale à la courbe (C_f).

$$x = 0$$


Remarque : Si $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+6}{x}$ existe

$$\text{alors } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{x^2+6}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+6}{x}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x^2+6}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+6}{x}$$

$$\text{on a } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{x^2+6}{x} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x^2+6}{x} = +\infty$$

$$-\infty \neq +\infty$$

CONTRADICTION car $-\infty \neq +\infty$.

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+6}{x}$ n'existe pas.

Remarque :

x	-10	-1	-0,1	-0,01	-0,001	0	0,001	0,01	0,1	1	10
$\frac{x^2+6}{x}$	-10,6	-7	-60,1	-600,01	-6000,001	$\nexists$	6000,001	600,01	60,1	7	10,6

b)

$$\cancel{\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{7-3x}{(2x-1)^2} = \frac{7-3(\frac{1}{2})}{(2(\frac{1}{2})-1)^2} = \frac{\frac{14}{2}-\frac{3}{2}}{0^2} = \frac{\frac{11}{2}}{0}}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
Signe de $(2x-1)^2$		$+$ $\circ$ $+$	

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} 7-3x = \frac{11}{2} \\ \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (2x-1)^2 = 0^+ \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{7-3x}{(2x-1)^2} = +\infty$$

Interprétation graphique : La droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est asymptote verticale à la courbe (C_f).

$$x = \frac{1}{2}$$

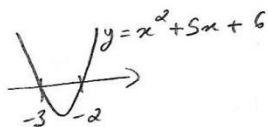

c)

$$\cancel{\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x}{x^2 + 5x + 6}} = \cancel{\frac{-3}{(-3)^2 + 5(-3) + 6}} = \cancel{\frac{-3}{9 - 15 + 6}} = \cancel{\frac{-3}{0}}$$

	1	5	6
-3		-3	-6
	1	2	0

$$x^2 + 5x + 6 = (x - (-3))(x + 2) \\ = (x + 3)(x + 2)$$

$$\begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$$



x	$-\infty$	-3	-2	$+\infty$
Signe de $x^2 + 5x + 6$		+	-	+

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow (-3)^-} x = \lim_{x \rightarrow -3} x = -3 \\ \lim_{x \rightarrow (-3)^-} x^2 + 5x + 6 = 0^+ \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{x}{x^2 + 5x + 6} = -\infty$$

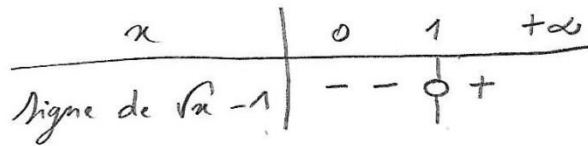
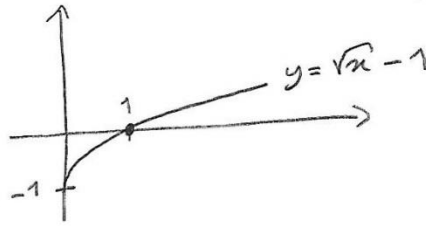
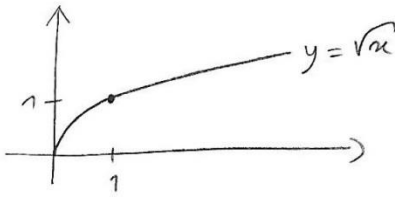
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow (-3)^+} x = \lim_{x \rightarrow -3} x = -3 \\ \lim_{x \rightarrow (-3)^+} x^2 + 5x + 6 = 0^- \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{x}{x^2 + 5x + 6} = +\infty$$

Interprétation graphique : La droite d'équation $x = -3$ est asymptote verticale à la courbe ($\mathcal{C}_f$).



d)

$$\cancel{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{\sqrt{x}-1} = \frac{(1)+3}{\sqrt{(1)}-1} = \frac{4}{0}}$$



$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{\overset{4}{\textcircled{x+3}}}{\underset{0^-}{\textcircled{\sqrt{x}-1}}} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{\overset{4}{\textcircled{x+3}}}{\underset{0^+}{\textcircled{\sqrt{x}-1}}} = +\infty$$

Interprétation graphique : La droite d'équation $x=1$ est asymptote verticale à la courbe ($\mathcal{C}_f$).



Solution détaillée de l'exercice 6

$$\cancel{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^2 - 3x - 14}{x - 2} = \frac{5(2)^2 - 3(2) - 14}{2 - 2} = \frac{20 - 6 - 14}{0} = \frac{0}{0}}$$

On a l'indétermination $\frac{0}{0}$.

2 est racine de $5x^2 - 3x - 14$

Factorisons ce polynôme avec la méthode de Horner :

$$\begin{array}{r|rrr} & 5 & -3 & -14 \\ 2 & & 10 & 14 \\ \hline & 5 & 7 & 0 \end{array}$$

$$5x^2 - 3x - 14 = (x - 2)(5x + 7)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^2 - 3x - 14}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(5x + 7)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} 5x + 7 \\ &= 5(2) + 7 \\ &= 17 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Remarque : } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(5x + 7)}{x - 2} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x \neq 2}} \frac{(x - 2)(5x + 7)}{x - 2} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x \neq 2}} 5x + 7 \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} 5x + 7 \end{aligned}$$

Remarque :

x	1	1,9	1,99	1,999	2	2,001	2,01	2,1	3
$\frac{5x^2 - 3x - 14}{x - 2}$	12	16,5	16,95	16,995	$\nexists$	17,005	17,05	17,5	22

Solution détaillée de l'exercice 8

$$\cancel{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{4+x} - 2} = \frac{0}{\sqrt{4+0} - 2} = \frac{0}{0}}$$

On a l'indétermination " $\frac{0}{0}$ ".

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{4+x} - 2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{4+x} + 2)}{(\sqrt{4+x} - 2)(\sqrt{4+x} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{4+x} + 2)}{\sqrt{4+x}^2 - 2^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{4+x} + 2)}{4+x-4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{4+x} + 2)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{4+x} + 2 \\ &= \sqrt{4+0} + 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Solution détaillée de l'exercice 10

a)

f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left(5x^3 - 3x^2 - \frac{1}{4}x + 1\right)' \\&= (5x^3)' - (3x^2)' - \left(\frac{1}{4}x\right)' + (1)' \\&= 5(x^3)' - 3(x^2)' - \frac{1}{4}(x)' + (1)' \\&= 5(3x^2) - 3(2x) - \frac{1}{4}(1) + 0 \\&= 15x^2 - 6x - \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Remarque :

$x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$x \mapsto x.x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$x \mapsto x.x.x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$x \mapsto 5$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$x \mapsto 5x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$x \mapsto 3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$x \mapsto 3x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$x \mapsto 5x^3 - 3x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$x \mapsto \frac{1}{4}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$x \mapsto \frac{1}{4}x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$x \mapsto 5x^3 - 3x^2 - \frac{1}{4}x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$x \mapsto 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$x \mapsto 5x^3 - 3x^2 - \frac{1}{4}x + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

b)

f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left(\frac{-2x^4 + x^2 + \sqrt{3}x - \sqrt{7}}{5}\right)' \\&= \frac{1}{5}(-2x^4 + x^2 + \sqrt{3}x - \sqrt{7})' \\&= \frac{1}{5}((-2x^4)' + (x^2)' + (\sqrt{3}x)' - (\sqrt{7})') \\&= \frac{1}{5}(-2(x^4)' + (x^2)' + \sqrt{3}(x)' - (\sqrt{7})') \\&= \frac{1}{5}(-2(4x^3) + (2x) + \sqrt{3}(1) - 0) \\&= \frac{-8}{5}x^3 + \frac{2}{5}x + \frac{\sqrt{3}}{5}\end{aligned}$$

c)

f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}f'(x) &= ((4x^2 - x + 1)(2x - 3))' \\&= (4x^2 - x + 1)'(2x - 3) + (4x^2 - x + 1)(2x - 3)' \\&= (8x - 1)(2x - 3) + (4x^2 - x + 1)2 \\&= 16x^2 - 24x - 2x + 3 + 8x^2 - 2x + 2 \\&= 24x^2 - 28x + 5\end{aligned}$$

Remarque :

$x \mapsto 4x^2 - x + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$x \mapsto 2x - 3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$x \mapsto (4x^2 - x + 1)(2x - 3)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

d)

$$5x + 2 = 0 \Leftrightarrow 5x = -2 \Leftrightarrow x = \frac{-2}{5}$$

f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{-2}{5}\right\}$.

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left(\frac{2x-3}{5x+2}\right)' \\&= \frac{(2x-3)'(5x+2) - (2x-3)(5x+2)'}{(5x+2)^2} \\&= \frac{2(5x+2) - (2x-3)(5)}{(5x+2)^2} \\&= \frac{10x+4 - (10x-15)}{(5x+2)^2} \\&= \frac{19}{(5x+2)^2}\end{aligned}$$

Remarque :

$x \mapsto 2x - 3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$x \mapsto 5x + 2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{-2}{5}\right\}, 5x + 2 \neq 0$$

$x \mapsto \frac{2x-3}{5x+2}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{-2}{5}\right\}$.

e)

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$

f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$.

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left(\frac{1}{x^2-3x+2}\right)' \\&= \frac{-(x^2-3x+2)'}{(x^2-3x+2)^2} \\&= \frac{-(2x-3)}{(x^2-3x+2)^2} \\&= \frac{-2x+3}{(x^2-3x+2)^2}\end{aligned}$$

f)

f est dérivable sur $]0; +\infty[$.

$$\begin{aligned}f'(x) &= (\sqrt{x} + 4x^3)' \\&= (\sqrt{x})' + (4x^3)' \\&= \frac{1}{2\sqrt{x}} + 12x^2\end{aligned}$$

Remarque :

$x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$.

$x \mapsto 4x^3$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ car elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$x \mapsto \sqrt{x} + 4x^3$ est dérivable sur $]0; +\infty[$.

g)

f est dérivable sur $]0; +\infty[$.

$$\begin{aligned}f'(x) &= (\sqrt{x}(3x + 4))' \\&= (\sqrt{x})'(3x + 4) + \sqrt{x}(3x + 4)' \\&= \frac{1}{2\sqrt{x}}(3x + 4) + \sqrt{x} \cdot 3 \\&= \frac{3x + 4}{2\sqrt{x}} + 3\sqrt{x}\end{aligned}$$

h)

f est dérivable sur $]0; +\infty[$.

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' \\&= \frac{-(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} \\&= \frac{-\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(\sqrt{x})^2} \\&= \frac{-1}{2\sqrt{x}} \\&= \frac{-1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{x} \\&= \frac{-1}{2x\sqrt{x}}\end{aligned}$$

i)

$$-3x + 1 > 0 \Leftrightarrow 1 > 3x \Leftrightarrow \frac{1}{3} > x$$

f est dérivable sur $\left]-\infty; \frac{1}{3}\right[$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sqrt{-3x+1})' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{-3x+1}} (-3x+1)' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{-3x+1}} (-3) \\ &= \frac{-3}{2\sqrt{-3x+1}} \end{aligned}$$

Remarque :

$x \mapsto -3x + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme.

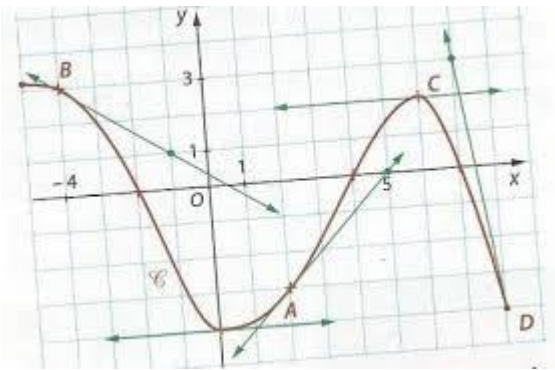
$t \mapsto \sqrt{t}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$.

$$-3x + 1 \in]0; +\infty[\Leftrightarrow -3x + 1 > 0 \Leftrightarrow 1 > 3x \Leftrightarrow \frac{1}{3} > x \Leftrightarrow x \in \left]-\infty; \frac{1}{3}\right[$$

$$\forall x \in \left]-\infty; \frac{1}{3}\right[, -3x + 1 \in]0; +\infty[$$

$$x \mapsto \sqrt{-3x+1} \text{ est dérivable sur } \left]-\infty; \frac{1}{3}\right[$$

Solution détaillée de l'exercice 12



- a) Lire graphiquement le nombre dérivé $f'(-4)$.

Quand on avance de 3, on monte de -2 .

Quand on avance de 1, on monte de $\frac{-2}{3}$.

$$f'(-4) = \frac{-2}{3}$$

- b) En déduire l'équation réduite de la tangente (d) en -4 .

$$(d): y = mx + p$$

$$(d): y = \frac{-2}{3}x + p$$

On a : $B \in (d)$

$$B(-4; 3)$$

$$3 = \frac{-2}{3}(-4) + p$$

$$3 = \frac{8}{3} + p$$

$$\frac{9}{3} - \frac{8}{3} = p$$

$$\frac{1}{3} = p.$$

$$(d): y = \frac{-2}{3}x + \frac{1}{3}$$

- c) Lire graphiquement le nombre dérivé $f'(2)$.

Quand on avance de 1, on monte de 1.

$$f'(2) = 1$$

- d) En déduire l'équation réduite de la tangente (r) au point A .

$$(r): y = mx + p$$

$$(r): y = 1x + p$$

$$(r): y = x + p$$

On a : $A \in (d)$

$$A(2; -3)$$

$$-3 = 2 + p$$

$$-5 = p.$$

$$(r): y = x - 5$$

- e) Lire graphiquement le nombre dérivé $f'(6)$.

Quand on avance de 1, on monte de 0.

$$f'(6) = 0$$

f) En déduire l'équation réduite de la tangente (t) au point C .

$$(t): y = mx + p$$

$$(t): y = 0x + p$$

$$(t): y = p$$

$$\text{On a : } C \in (t)$$

$$C(6; 2)$$

$$2 = p.$$

$$(d): y = 2$$

g) Déterminer le tableau de signe de f' et le tableau de variation de f sur $[-4; 8]$.

x	-4	0	6	8
Signe de $f'(x)$	-	-	+	-
$f(x)$	3	-4	2	-4

Solution détaillée de l'exercice 14

$$(t): y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

$$(t): y = f'(-2)(x + 2) + f(-2)$$

$$f'(x) = (3x^2 - 5x + 4)' = 6x - 5$$

$$f'(-2) = 6(-2) - 5 = -17$$

$$f(-2) = 3(-2)^2 - 5(-2) + 4 = 12 + 10 + 4 = 26$$

$$(t): y = -17(x + 2) + 26$$

$$(t): y = -17x - 34 + 26$$

$$(t): y = -17x - 8$$

Solution détaillée de l'exercice 16

$$f(x) = -3x^2 + 12x - 8$$

$$\textcircled{1} f'(x) = -6x + 12 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\textcircled{2} f'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x + 12 = 0 \Leftrightarrow 12 = 6x \Leftrightarrow 2 = x$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$ 0 $-$	
$f(x)$		4	

$$f(2) = -3(2)^2 + 12(2) - 8 = -12 + 24 - 8 = 4$$

$\textcircled{3}$ La fonction f admet un maximum.

Ce maximum vaut 4.

Il est atteint en $x = 2$.

$\textcircled{4}$ La fonction f n'admet pas de minimum.

⑤

x	y
0	-8
1	1
2	4

